

Analyse Numérique
Application des méthodes directes et algorithmes
itératifs sur une équation parabolique

DOEUK Nosing
POUILLER Jérôme
TESSARI Marco
TETZLAFF Franck
EPITA - Juin 2003

Table des matières

1 Partie Mathématique

1.1 Question 1

Appliquons la formule de la dérivée par rapport à t

$$\frac{\delta U(X, t)}{\delta t} = \frac{U(ih, n\Delta t + \Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (1)$$

$$= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2)$$

Appliquons la formule de la dérivée par rapport à X

$$\frac{\delta^2 U(X, t)}{\delta X^2} = \frac{\delta U(X, t)}{\delta X} \frac{U(ih + h, n\Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (3)$$

$$= \frac{\delta U(X, t)}{\delta X} \frac{U(ih + h, n\Delta t)}{h} - \frac{\delta U(X, t)}{\delta X} \frac{U(ih, n\Delta t)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

$$= \frac{U(ih + h - h, n\Delta t) - U(ih + h, n\Delta t)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \quad (5)$$

$$- \frac{U(ih - h, n\Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$+ \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \frac{U_i^n - U_{i-1}^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (6)$$

On obtient

$$f(X, t) = \frac{\delta U(X, t)}{\delta t} - \frac{\delta^2 U(X, t)}{\delta X^2} \quad (7)$$

$$f(ih, n\Delta t) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{U_i^n - U_{i-1}^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2) \quad (8)$$

FIXME : Les domaines de definition des variable ne sont pas definis

FIXME : L'erreur de consistance est mise au hasard

On trouve donc l'erreur de consistance $\epsilon(h, \delta t) = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2)$

1.2 Question 2

Dela même facon que pour la question 1, On applique la formule de la dérivée par rapport à t

$$\frac{\delta U(X, t)}{\delta t} = \frac{U(ih, n\Delta t - \Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (9)$$

$$= \frac{U_i^{n-1} - U_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (10)$$

Appliquons la formule de la dérivée par rapport à X

$$\frac{\delta^2 U(X, t)}{\delta X^2} = \frac{\delta}{\delta X} \frac{U(ih + h, n\Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (11)$$

$$= \frac{\delta}{\delta X} \frac{U(ih + h, n\Delta t)}{h} - \frac{\delta U(X, t)}{\delta X} \frac{U(ih, n\Delta t)}{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (12)$$

$$= \frac{U(ih + h - h, n\Delta t) - U(ih + h, n\Delta t)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \quad (13)$$

$$- \frac{U(ih - h, n\Delta t) - U(ih, n\Delta t)}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$+ \mathcal{O}(h^2)$$

$$= \frac{U_i^n - U_{i-1}^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (14)$$

On obtient

$$f(X, t) = \frac{\delta U(X, t)}{\delta t} - \frac{\delta^2 U(X, t)}{\delta X^2} \quad (15)$$

$$f(ih, n\Delta t) = \frac{U_i^{n-1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2) \quad (16)$$

FIXME : Les domaines de definition des variable ne sont pas definis

FIXME : L'erreur de consistance est mise au hasard

1.3 Question 3

Pour $(\mathcal{P}_{h, \Delta t})$:

$$f(ih, n\Delta t) = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{U_i^n - U_{i-1}^n + U_{i-1}^n}{h^2} \quad (17)$$

$$U_i^{n+1} = \Delta t f(ih, n\Delta t) - \frac{\Delta t}{h^2} (U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + U_i^n \quad (18)$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ U_N^{n+1} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} f(h, n\Delta t) \\ f(ih, n\Delta t) \\ \vdots \\ f(ih, n\Delta t) \\ f(ih, n\Delta t) \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{h^2} \begin{pmatrix} U_1^n - U_2^n \\ U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n \\ \vdots \\ U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n \\ U_N^n - U_{N-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_i^n \\ \vdots \\ U_i^n \\ U_N^n \end{pmatrix} \quad (19)$$

Pour $(\mathcal{Q}_{h, \Delta t})$, on essaye de poser le problème sous la forme

$$\mathbf{A}(U_n) \times U_{n+1} = \mathbf{B}(U_n) \quad (20)$$

d'où :

$$f(ih, n\Delta t) = \frac{U_i^{n-1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{h^2} \quad (21)$$

$$f(ih, n\Delta t) - U_i^{n-1} = \frac{2\Delta t + h^2}{\Delta t h^2} U_i^n - \frac{1}{h^2} U_{i+1}^n - \frac{1}{h^2} U_{i-1}^n \quad (22)$$

$$= -\frac{1}{h^2} \left(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - \frac{2\Delta t + h^2}{\Delta t} U_i^n \right) \quad (23)$$

Par conséquent :

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\frac{2\Delta t + h^2}{\Delta t} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{2\Delta t + h^2}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} U_0^{n-1} + \Delta t f(0, n\Delta t) \\ \vdots \\ U_N^{n-1} + \Delta t f(Nh, n\Delta t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

1.4 Question 4

Pour $(\mathcal{P}_{h,\Delta t})$: Explicite
 Pour $(\mathcal{Q}_{h,\Delta t})$: Implicite

1.5 Question 5