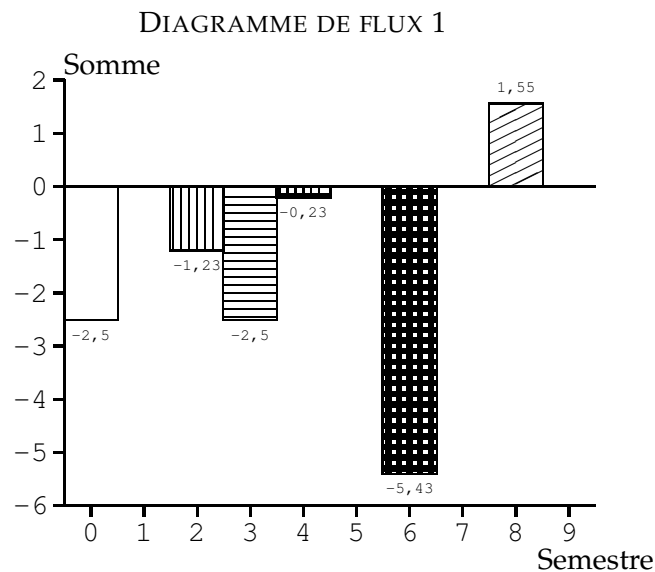


MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES
Évaluation et financement d'un projet

Jérôme POUILLER
Ing1 - Groupe C
Promo2005

Vendredi 28 mai 2003

1 Question 1



- Perte** : M₁ premier versement à Mercury -2,5 MUSD
- Perte** : E + W_p + W_a achat serveur plus Projet Manager plus assistant -1,23 MUSD
- Perte** : M₂ deuxième versement à Mercury -2,5 MUSD
- Perte** : W_p + W_a Project Manager plus assistant -0,23 MUSD
- Perte** : M₃ + W_p + W_a + W_c + W_h troisième versement à Mercury plus Project Manager plus assistant plus formation (Salaire des commerciaux et des Calls Center) -5,43 MUSD
- Gain** : économie net (suppression de postes et autres) +1,55 MUSD

Soit n le nombre d'année à partir duquel le projet est rentabilisé.
Soit G_j les gains mensuels perçus (G_j est identique chaque mois).

$$\begin{aligned}
 G_0 &= \sum_{j=4}^n \frac{G_j}{(1+i_a)^j} \\
 &= \frac{G_j}{(i+i_a)^3} \frac{(1-(1+i)^{-n+3})}{i} \\
 &= G_j \frac{((1+i_a)^{-3} - (1+i_a)^{-n})}{i_a} \tag{1} \\
 C_0 &= M_1 + \frac{E + W_p + W_a}{(1+i_a)} + \frac{M_2}{(1+i_a)^{1,5}} + \frac{W_p + W_a}{(1+i_a)^2} + \frac{M_3 + W_p + W_a + W_h}{(1+i_a)^3} \\
 &= 10,374
 \end{aligned}$$

1.1 On cherche n avec G_j fixé

On veut que $C_0 = G_0 \Rightarrow$ il nous faut calculer n

$$\begin{aligned}
 C_0 &= G_j \frac{((1+i_a)^{-3} - (1+i_a)^{-n})}{i_a} \\
 \frac{C_0 i_a}{G_j} &= (1+i_a)^{-3} - (1+i_a)^{-n} \\
 (1+i_a)^{-n} &= -\frac{C_0 i_a}{G_j} + (1+i_a)^{-3} \\
 -n \log(1+i_a) &= \log\left(-\frac{C_0 i_a}{G_j} + (1+i_a)^{-3}\right) \\
 n &= -\frac{\log\left(-\frac{C_0 i_a}{G_j} + (1+i_a)^{-3}\right)}{\log(1+i_a)} \\
 n &= -\frac{\log\left(-\frac{10,374 \times 0,08}{1,55} + (1,08)^{-3}\right)}{\log(1,08)} \\
 n &= 17,58
 \end{aligned} \tag{2}$$

Le projet sera rentabilisé à partir de la 18ème année

1.2 On cherche G_j avec n fixé

Avant de calculer G_j , il nous faut actualiser G_0

$$\begin{aligned}
 G_j &= 10W_h + 7W_c + x \\
 G_0 &= \sum_{j=4}^9 \frac{G_j}{(1+i_a)^j} \\
 &= \frac{G_j}{(1+i)^3} \sum_{j=1}^6 (1+i)^{-j} \\
 &= \frac{G_j}{(1+i_a)^3} \frac{(1 - (1+i)^{-6})}{i}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Maintenant, on calcule les bénéfices x à réaliser chaque année durant 6 ans. On a $G_j = x + 1,55$

$$\begin{aligned}
 G_0 &= \frac{G_j}{(1+i_a)^3} \frac{(1 - (1+i_a)^{-6})}{i} \\
 G_j &= \frac{C_i \times (1+i_a)}{(1 - (1+i_a)^6)} \\
 x &= \frac{C_0 i_a \times (1+i_a)}{(1 - (1+i_a)^6)} - 1,55 \\
 x &= \frac{10,374 \times 0,08 \times 1,08}{(-0,08)^6} - 1,55 \\
 x &= 1276
 \end{aligned} \tag{4}$$

Il faut réaliser un bénéfice de 1 276 KUSD chaque année afin que le projet soit rentabilisé au bout de 6 ans.

2 Question 2

Afin de limiter les risques de change, l'entreprise a le choix parmi les solutions suivantes :

1. elle accepte de passer par le taux de change et achète des dollars afin de payer l'E10.000 et accepte ainsi l'instabilité de la bourse.
2. elle décide de prendre un contrat à terme
3. elle décide d'acheter des options d'achat

La solution la plus flexible est de prendre des options d'achat afin d'éviter de surpayer l'E10.000. En effet, cette solution permet de 'fixer' le prix de l'euro par rapport au dollar.

2.1 Qu'est-ce qu'une option ?

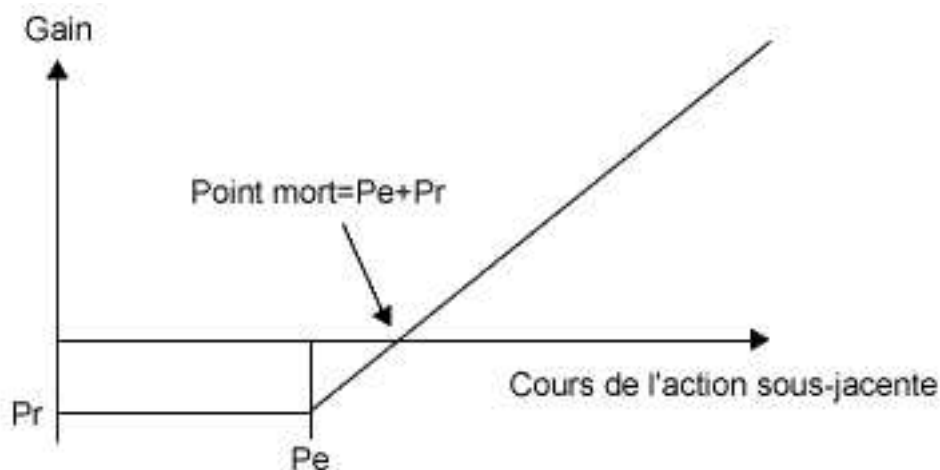
Une option donne à son acquéreur, moyennant le paiement d'une prime (ou prix de l'option appelé premium), le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat ou Call) ou de vendre (option de vente ou put), à un prix fixe l'avance (prix d'exercice), une quantité déterminée d'un actif financier appelé actif sous-jacent (actions, devises, contrats sur emprunt notionnel...), pendant une période définie par une date d'expiration.

2.2 Acheter un option d'achat - achat de call

L'acheteur du call obtient le droit d'acheter un volume d'actions donné à un prix d'exercice (P_e) fixe et ce jusqu'à l'expiration prévue.

Si le cours de l'action est supérieur à P_e , alors l'acheteur de l'option peut exercer son droit. Il achète alors l'action à P_e et la revend instantanément au prix de marché, engrangeant ainsi un bénéfice. Ce bénéfice est naturellement gravé de la prime payée pour acquérir l'option.

Le point mort, c'est à dire le cours de l'action pour lequel l'acheteur de l'option commence à gagner de l'argent est égal au prix d'exercice plus la prime.



En notant P_e , le prix d'exercice, Pr , le montant de la prime, on obtient le profil de perte et gain pour l'acheteur d'un call est le suivant.

La zone de gain se situe donc quand le cours de l'action sous-jacente est supérieure au point mort, c'est à dire à Pe plus Pr . Notons enfin que la perte maximale de l'acheteur de call est limitée à la prime. L'acheteur de call anticipe une hausse du cours de l'action sous-jacente.

Si le cours de l'action est inférieure au prix d'exercice, on dit que l'option est en dehors de la monnaie. Si il est égal, on dit que l'option est à la monnaie. Dans tous les cas contraire, on dit que l'action est dans la monnaie.

2.3 Comment varie la prime ?

Cinq facteurs font varier la prime d'une option. Il s'agit :

- du cours de l'actif sous-jacent ;
- du prix d'exercice ;
- de la volatilité de l'action support ;
- de la date d'échéance ;
- des taux d'intérêt.

La formule qui permet de calculer la prime d'une option est issue du modèle de Black et Sholes, trop complexe pour être explicité ici.

2.4 Le coût de cette couverture

Le coût de cette couverture serait de :

1 euro = 0.8454 dollar (prix du 24/05/2003)

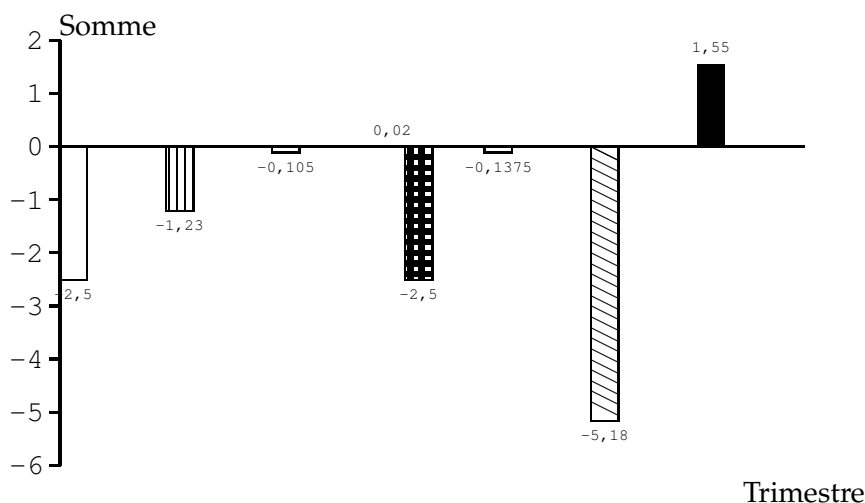
Ne pas oublier de multiplier par la taille unitaire du contrat

Exercice réalisé sur le site de www.boursorama.com le 24/05/2003

| Code | Dernier | Var. | Type | Emetteur | Prix d'exercice | Echéance | Parité | Volume |
|-------|-----------|---------|------|-------------|-----------------|------------|--------|--------|
| 33670 | 4.74 (c) | +10.23% | C | COMMERZBANK | 1.15 | 08/03/2004 | 0.01 | 500 |
| 33669 | 7.54 (c) | +8.33% | C | COMMERZBANK | 1.10 | 08/03/2004 | 0.01 | 500 |
| 33668 | 11.11 (c) | +6.32% | C | COMMERZBANK | 1.05 | 08/03/2004 | 0.01 | 500 |

3 Question 3

DIAGRAMME DE FLUX 2



- Perte** : M_1 premier versement à Mercury -2,5 MUSD
- Perte** : $E + W_p + W_a$ achat serveur plus Projet Manager plus assistant -1,23 MUSD
- Perte** : $W_p + W_a + \frac{1}{2}P$ Project Manager plus assistant moins pénalité -0,105 MUSD
- Gain** : $W_p + W_a$ Project Manager plus assistant moins pénalité 0,02 MUSD
- Perte** : M_2 deuxième versement à Mercury -2,5 MUSD
- Perte** : $W_p + W_a - \frac{1}{4}P$ Project Manager plus assistant moins pénalité -0,1375 MUSD
- Perte** : $M_3 + W_p + W_a + W_f$ troisième versement à Mercury plus Project Manager plus assistant

plus formation moins pénalité -5,18 MUSD

■ Gain : économie net (suppression de postes et autres) +1,55 MUSD

$$G_0 = \sum_{j=6}^n \frac{G_j}{(1+i_a)^j} + P_t$$

$$P_t = \frac{P}{2(1+i_a)^2} + \frac{P}{(1+i_a)^3} + \frac{P}{4(1+i_a)^4}$$

$P_t = 352$ KUSD : pénalités globales

$$\begin{aligned} C_0 &= M_1 + \frac{E + W_p + W_a}{(1+i_a)} + \frac{W_p + W_a}{(1+i_a)^2} + \frac{W_p + W_a}{(1+i_a)^3} + \frac{M_2}{(1+i_a)^{3,25}} + \frac{W_p + W_a}{(1+i_a)^4} + \frac{M_3 + W_p + W_a + W_f}{(1+i_a)^5} \\ &= 9830 \end{aligned} \quad (5)$$

3.1 On cherche n avec G_j fixé

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=6}^n \frac{G_j}{(1+i_a)^j} + P_t \\ n &= -\frac{\log\left(-\frac{(C_0 - P_t)i_a}{G_j} + (1+i_a)^{-5}\right)}{\log(1+i_a)} \\ n &= -\frac{\log\left(-\frac{(9,830 - 0,352) \times 0,08}{1,55} + (1,08)^{-5}\right)}{\log(1,08)} \\ n &= 21,48 \end{aligned} \quad (6)$$

Le projet sera rentabilisé à partir de la 22ème année

3.2 On cherche G_j avec n fixé

Avant de calculer G_j , il nous faut actualiser C_0

$$G_j = 10W_h + 7W_c + x$$

$$G_j = 1,55 + x$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=5}^{10} \frac{G_j}{(1+i_a)^j} + P_t \\ &= \frac{G_j}{(1+i)^5} \sum_{j=1}^6 (1+i)^{-j} + P_t \\ &= \frac{G_j}{(1+i_a)^5} \frac{(1 - (1+i)^{-6})}{i} + P_t \end{aligned} \quad (7)$$

Maintenant, on calcule les bénéfices x à réaliser chaque année durant 5 ans. On a toujours $G_j = x + 1,55$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{G_j}{(1+i_a)^5} \frac{(1-(1+i)^{-6})}{i_a} + P_t \\
 G_j &= \frac{(C_0 - P_t)i_a \times (1+i_a)^5}{(1-(1+i)^{-6})} \\
 x &= \frac{(C_0 - P_t)i_a \times (1+i_a)^5}{(1-(1+i)^{-6})} - 1,55 \\
 x &= \frac{(10,374 - 0,352) \times 0,08 \times 1,08^5}{1 - (1,08)^{-6}} - 1,55 \\
 x &= 1635
 \end{aligned} \tag{8}$$

Il faut réaliser un bénéfice de 1 635 KUSD chaque année afin que le projet soit rentabilisé au bout de 6 ans.

4 Question 4

4.1 Emprunt à amortissement constant sur 5 ans à 8%

L'amortissement est constant \Rightarrow il suffit de calculer cet amortissement $\frac{11}{5} = 2,2$, de calculer les intérêts (à 8%) sur ce qu'il reste à payer et enfin de calculer l'annuité à payer, qui est la somme des amortissements et des intérêts. Puis, mettre à jour la somme qu'il reste à payer (la somme qu'il reste à payer moins l'amortissement en cours)

| Reste à payer | Amortissement | Intérêt | Annuité |
|--------------------|-----------------------|----------------------------|------------------------|
| 11 | 2,2 $\frac{11}{5}$ | 0,88 $11 \times 0,08$ | 3,08 $0,88 + 2,2$ |
| 8,8 $11 - 2,2$ | 2,2 $\frac{11}{5}$ | 0,704 $8,8 \times 0,08$ | 2,904 $0,704 + 2,2$ |
| 6,6 $8,8 - 2,2$ | 2,2 $\frac{11}{5}$ | 0,528 $6,6 \times 0,08$ | 2,728 $0,528 + 2,2$ |
| 4,4 $6,6 - 2,2$ | 2,2 $\frac{11}{5}$ | 0,352 $4,4 \times 0,08$ | 2,552 $0,352 + 2,2$ |
| 2,2 $4,4 - 2,2$ | 2,2 $\frac{11}{5}$ | 0,176 $2,2 \times 0,08$ | 2,376 $0,176 + 2,2$ |

4.2 Emprunt à annuité constante sur 5 ans à 8%

L'annuité est constante \Rightarrow il suffit de calculer cette annuité, notée a .

$$\begin{aligned}
 C_n &= C_0 \times (1+i_a)^n \\
 a &= \frac{C_n \times i}{(1+i_a)^n - 1} \\
 a &= \frac{C_0 \times (1+i_a)^n \times i}{(1+i_a)^n - 1} \\
 a &= \frac{11 \times (1,08)^5 \times 0,08}{(1,08)^5 - 1} \\
 a &= 2,755
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ensuite, il faut calculer les intérêts (à 8%) sur ce qu'il reste à payer et enfin de calculer l'amortissement, qui est la différence entre l'annuité et les intérêts. Puis, mettre à jour la somme qu'il reste à payer (la somme qu'il reste à payer moins l'amortissement en cours).

| Reste à payer | Amortissement | Intérêt | Annuité |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------|---------|
| 11 | 1,875 $2,755 - 0,88$ | 0,88 $11 \times 0,08$ | 2,755 |
| 9,125 $11 - 1,875$ | 2,025 $2,755 - 0,730$ | 0,730 $9,125 \times 0,08$ | 2,755 |
| 7,1 $9,125 - 2,187$ | 2,187 $2,755 - 0,568$ | 0,568 $7,1 \times 0,08$ | 2,755 |
| 4,913 $7,1 - 2,362$ | 2,362 $2,755 - 0,393$ | 0,393 $4,913 \times 0,08$ | 2,755 |
| 2,551 $4,913 - 2,551$ | 2,551 $2,755 - 0,204$ | 0,204 $2,551 \times 0,08$ | 2,755 |

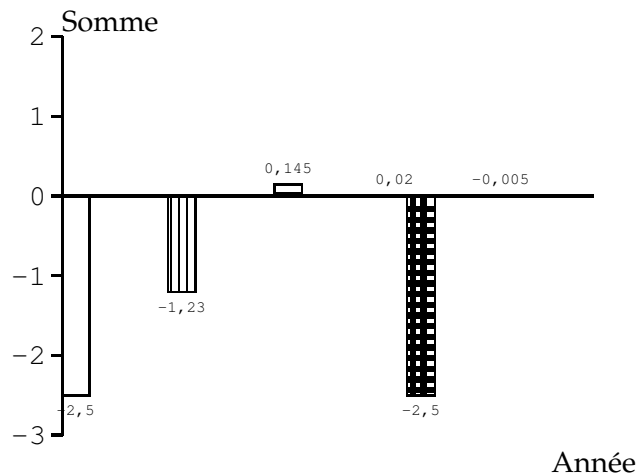
4.3 Emission d'obligation sur 6 ans à 6%

Calculons d'abord les frais de la première année avec les frais d'émission et les frais sur l'intérêt
 $\Rightarrow 11 \times (0,02 + 0,01) = 0,33$

| Reste à payer | Amortissement | Intérêt | Annuité |
|---------------|---------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 11 | 0 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 0,99 $0,33(\text{frais}) + 0,66$ |
| 11 | 0 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 0,66 |
| 11 | 0 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 0,66 |
| 11 | 0 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 0,66 |
| 11 | 0 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 0,66 |
| 11 | 11 | 0,66 $11 \times 0,06$ | 11,66 $0,66 + 11$ |

5 Question 5

DIAGRAMME DE FLUX 3



- Perte** : M_1 premier versement à Mercury -2,5 MUSD
- Perte** : $E + W_p + W_a$ achat serveur plus assistant plus Project Manager -1,23 MUSD
- Gain** : $W_p + W_a - 5U - \frac{1}{2}P$ Project Manager plus assistant plus 5 machines Unix +0,145 MUSD
- Perte** : $W_p + W_a - P$ Project Manager plus assistant moins les pénalités +0,02 MUSD -2,45 MUSD
- Perte** : M_2 deuxième versement à Mercury -2,5 MUSD
- Gain** : $\frac{1}{4}(W_p + W_a - p)$ Project Manager plus assistant moins pénalités +0,005 MUSD

Nouveau tableau d'amortissement à emprunt à annuité constante, à 8%, avec report des annuités la 3eme et 4eme année.

| Reste à payer | Amortissement | Intérêt | Annuité |
|------------------------|------------------------|------------------------------|------------------|
| 11 | 1,875 2,755 - 0,88 | 0,88 $11 \times 0,08$ | 2,775 |
| 9,125 11 - 1,875 | 2,025 2,755 - 0,730 | 0,730 $9,125 \times 0,08$ | 2,775 |
| 7,1 9,125 - 2,025 | 0 0,568 - 0,568 | 0,568 $7,1 \times 0,08$ | 0,568 Reporte |
| 7,1 | 0 0,568 - 0,568 | 0,568 $6,248 \times 0,08$ | 0,568 Reporte |
| 7,1 | 2,187 2,755 - 0,568 | 0,568 $7,1 \times 0,08$ | 2,755 Reporte |
| 4,913 7,1 - 2,187 | 2,362 2,755 - 0,396 | 0,396 $4,913 \times 0,08$ | 2,755 |
| 2,551 4,913 - 2,362 | 2,551 2,755 - 0,204 | 0,204 $2,551 \times 0,08$ | 2,755 |

6 Question 6

Pour calculer la valeur actuelle (à $t = 0$), nous ne prendrons pas en compte les coûts liés à l'emprunt mais seulement les sommes dépensées liées au staff, à la salle, à l'achat du E10.000, au paiement de Mercury moins les pénalités reçues de ce dernier \Rightarrow il nous faut donc actualiser ces sommes par rapport au nouveau diagramme de flux (cf. diagramme de flux 3)

$$C_0 = M_1 + \frac{E + W_p + W_a}{(1 + i_a)} + \frac{W_p + W_a - \frac{1}{2}P - 5U}{(1 + i_a)^2} + \frac{W_p + W_a - P}{(1 + i_a)^3} + \frac{M_2}{(1 + i_a)^{3,25}} + \frac{\frac{1}{4}(W_p + W_a - P)}{(1 + i_a)^4}$$
$$C_0 = 2,5 + \frac{1,23}{1,08} + \frac{-0,145}{1,08^2} + \frac{2,45}{1,08^3} + \frac{2,5}{1,08^{3,25}} + \frac{\frac{1}{4}(2,45)}{1,08^4}$$
$$= 7,856$$

(10)

Le projet a donc coûté à la société la modique somme de 7 856 KUSD.